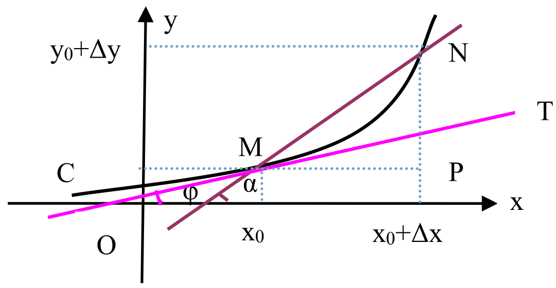
第三章　导数与微分

§1　导数概念与运算

	定义	记法
1、导数概念	设函数 y=f(x)在 x_0点及其近旁有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 y=f(x)在 x_0点可导。	$f'(x_0)$ ， $f'(x)\big\|_{x=x_0}$ ， $\dfrac{df(x)}{dx}\Big\|_{x=x_0}$ ， $\dfrac{dy}{dx}\Big\|_{x=x_0}$ 。
2、导函数	如果函数 y=f(x)在区间(a,b)内每一点处都可导，则称 f(x)在区间(a,b)内可导。这样在（a,b)区间内就确定了一个新的函数称为 y=f(x)的导函数。	$f'(x)$ ， $\dfrac{df(x)}{dx}$， $\dfrac{dy}{dx}$ 。
3、导数的几何意义		函数 y=f(x)在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$是曲 y=f(x)在点（x_0，y_0)处的切线斜率，即 $k=f'(x_0)=\tan\alpha$
	曲线函数 y=f(x)在（x_0 ， y_0)处的切线与法线方程(函数在 x_0 处可导） 切线方程　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ 法线方程　$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ 当 $f'(x_0)=0$ 时，法线方程　$x=x_0$ 若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴，切线方程： $x=x_0$ 简例　求曲线 y=lnx 在（1，0)处的切线与法线方程。 解：①求导　$y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　②求斜率 $k=y'\big\|_{x=1}=1$	

	③切线方程　y= x-1　;　法线方程　y = -x+1　.	
4、可导与连续的关系	函数 y=f(x)在 x_0 点可导则函数 y=f(x)在 x_0 点连续。 反之，不一定。	反例：下列函数 $y=\|x\|$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 x=0 处都不可导，但在 x=0 处连续。
5、导数的等价表示	① $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$　② $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	
6、导数公式与法则	1^0．基本初等函数导数公式 $(C)'=0$；　$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$；　$(a^x)'=a^x\ln a$； $(e^x)'=e^x$；　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$； $(\sin x)'=\cos x$；　$(\cos x)'=-\sin x$；　$(\tan x)'=\sec^2 x$； $(\cot x)'=-\csc^2 x$；　$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$；　$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$； $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$； $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$；　$(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}$。 2^0．函数和、差、积、商的求导法则 设 u=u（x），v=v（x）均可导，则 $(u\pm v)'=u'\times v'$ $(uv)'=u'v+uv',(Cu)'=Cu'$（C为常数）； $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$ 3^0．复合函数的求导法则 设 y=f（u），u=φ（x），f，φ均可导，则复合函数 y=f[φ（x）]的导数为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$　或　$y'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$. 4^0．反函数的求导法则 设 y=f（x），$f'(x)\neq 0$ 且存在反函数 x=φ（y），则 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$　.	

7、求导数的方法	（1）四则运算法则求导	简例　求 $y=x\ln x+\frac{\sin x}{1+x}-e^{2}+2\sqrt{x}$ 的导数。 解：$y'=(x\ln x)'+(\frac{\sin x}{1+x})'-(e^{2})'+2(\sqrt{x})'$ $=(x)'\ln x+(\ln x)'x+\frac{(\sin x)'(1+x)-(1+x)'\sin x}{(1+x)^{2}}-0+2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $=\ln x+1+\frac{(1+x)\cos x-\sin x}{(1+x)}+\frac{1}{\sqrt{x}}$
	（2）复合函数求导	简例　求 $y=\ln(1+x^{2})$ 的导数。 解：函数的复合结构为 $y=\ln u, u=(1+x^{2})$； $\frac{dy}{dx}=(\ln u)'(1+x^{2})'=\frac{1}{u}\times 2x=\frac{2x}{1+x^{2}}$
	（3）隐函数求导	简例 求方程 $y^{2}+xy=e^{y}$ 所确定的隐函数 y=f(x)的导数. 解：方程两边同时对 x 求导数； $(y^{2})'+(xy)'=(e^{y})'$ $2yy'+(x)'y+y'x=e^{y}y'$ $y'(2y+e^{y}+x)=-y$ $y'=\frac{-y}{(2y+e^{y}+x)}\quad(2y+e^{y}+x\neq 0)$ 注：含有 y 的函数在对 x 求导数时要乘以 y'　。
	（4）参数方程求导	简例　求由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$ （t 为参数）所确定的导数。 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{(\cos t)'}{(\sin t)'}=-\tan t$
8、高阶导数	二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数	记 $f''(x)$，$f'''(x)$，$f^{(4)}(x)\ldots.\ f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$，$\ldots.$ $\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$.
	二阶导数物理意义	$s'=\frac{ds}{dt}=v$　,$s''=\frac{d^{2}s}{dt^{2}}=\frac{dv}{dt}=a$　.

§2 函数的微分

1、函数在 x_0 点的微分	设函数 y=f(x)在 x_0处有导数 $f'(x_0)$，则 $f'(x_0)\Delta x$ 称作函数 y=f(x)在 x_0处的微分，记为 $dy\big\|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$ 。
2、函数在 x 处的微分	函数 y=f(x)在 x 处的微分称为函数的微分，记为 $dy=f'(x)\Delta x$ 。
3、函数在 x_0处的微分的几何意义	函数 y=f(x)在 x 处的微分 dy,等于曲线 y=f(x)在点 M(x_0,y_0)处的切线 MT 的纵坐标对用于Δx 的增量。
4、微分运算公式与法则	1^0 微分基本公式 $d(c)=0$　　$d(e^x)=e^x dx$ $d(x^u)=ux^{u-1}$　　$d(a^x)=a^x\ln a dx$ $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$　　$d(\sin x)=\cos x dx$ $d(\log^x{}_a)=\frac{1}{x\ln a}dx$　　$d(\tan x)=\sec^2 x dx$ $d(\cos x)=-\sin x dx$　　$d(\sec x)=\sec x\cdot\tan x dx$ $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$　　$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $d(\csc x)=-\csc x\cdot\cot dx$　　$d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$ $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　$d(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$　　$d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}dx$ 2^0 函数的和、差、积、商的微分运算法则 $d(u(x)\pm v(x))=du(u)\pm dv(x)$ $d(u(x)\cdot v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$ $d(cu(x))=cdu(x)$ $d(\frac{u(x)}{r(x)})=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(v)}{v^2(x)}(v(x)\neq 0)$ 3^0 复合函数的微分法则 设 y=f(u)，当 u 是自变量时， $dy=f'(u)du$

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">当 u 是中间变量时， $u=\varphi(x)$
$\therefore \quad dy=f'(u)\cdot\varphi(x)dx \qquad du=\varphi'(x)dx$
$dy=f'(u)du$
由此可见，不论 u 是自变量还是中间变量，y=f(u) 的微分保持同一形式 $dy=f'(u)du$，这一性质称一阶微分形式不变性</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5、近似计算公式</td><td>函数值的近似计算
$f'(x_0)\neq 0,\Delta x\to 0$ 公式
$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$
$(x=x_0+\Delta x)$</td><td>简例 求 $\sin 29^0$ 的近似值。
解： 设 f(x)=sinx, $f'(x)=\cos x$.
取 $x_0=30^0, x=29^0, \Delta x=-1^0\approx-\frac{\pi}{180}rad$
$\sin 29^0\approx\sin 30^0+\cos 30^0\times(-\frac{\pi}{180})$
≈0.5-1.732×3.14/360≈0.48489</td></tr>
<tr><td>函数增量的近似计算
$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$</td><td>简例 半径为 10cm 的金属圆片加热后，半径伸长了 0.05cm, 问面积大约增大了多少？
解 设金属圆片面积为 y, 半径为 x, 则 $y=\pi x^2$.
解 $dy=f'(x_0)\Delta x=2\pi x\Delta x$
$=2\times\pi\times10\times0.05\approx3.14cm^2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">函数 y=f(x)在 x_0 点连续是函数 y=f(x)在 x_0 点可导的条件充分非必要条件。
函数 y=f(x)在 x_0 点可导与函数 y=f(x)在 x_0 点可微是互为充分必要条件。</td></tr>
</table>